Prohledávání stavového prostoru

Vilém Vychodil

6. srpna 1998

Abstrakt

Následující text je asi jednou pětinou textu, který jsem psal coby student prvního ročníku informatiky. První část tohoto výřezu by měla být nápomocna studentům při implementaci strategických algoritmu, či algoritmů efektivně prohledávajících konečný stavový prostor. Druhá část se zběžně věnuje multikriteriálním výběrům, ty mohou být vhodným nástrojem při konstrukci ohodnocovacích funkcí. Celý text je prán velmi neformálně a mohou se v něm vyskytovat chyby. Veškerá tvrzení jsou uváděna bez důkazů. Text je více než vhodné kombinovat s další literaturou a příbuznými materiály. Autor může být kontaktován prostřednictvím elektronické pošty na adrese <vilem.vychodil@upol.cz>.

1. Teorie her

Teorie her a maticové hry spadají do množiny úloh *řešení konfliktních situací*. Tyto úlohy mají za úkol řešit situace, ve kterých se vyskytují jevy, které jsou spolu v konfliktu. Samotné maticové hry se zabývají „hrou“ mezi dvěma hráči a snaží se dospět k co nejlepším herním strategiím, které budou vyhovovat jednomu či druhému hráči. Druhého hráče figurujícího ve hře považujeme za oponenta. Tento oponent může mít různé vlastnosti, obecně můžeme uvažovat inteligentního protivníka nebo protivníka, jemuž nezáleží na celkové bilanci hry. Právě od vlastností protivníka je odvozena celá škála řešení maticových her.

1.1. Maticové hry

V maticové hře jsou před sebe postaveni dva hráči. My z našeho pohledu hrajeme obvykle za prvního hráče, může to být samozřejmě i jinak. Druhý hráč je náš oponent. Základní problém celé maticové hry je v tom, *jak prosadit náš strategický záměr na úkor protivníka* tak, abychom ze hry vytěžili co nejvíce kreditů.

Mějme tedy dva hráče. Tito dva hráči se postupně střídají ve svých tazích. První hráč volí útočnou strategii, oponent mu na ni odpovídá svou defensivní strategií. Výsledkem této jedné hry je suma kreditů, o které se oba dva hráči obohatí. K tomu, abychom mohli přehledně zapisovat jednotlivé sumy výher, konstruujeme tzv. **výplatní matice**, pro prvního i druhého hráče. Výplatní matici prvního hráče budeme označovat M a výplatní matici druhého hráče N.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots \\ n_{21} & n_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tabulka 1. Výplatní matice

M	k	n	p
k	0	1	-1
n	-1	0	1
p	1	-1	0

N	k	n	p
k	0	-1	1
n	1	0	-1
p	-1	1	0

Obě dvě matice, tedy M i N jsou matice řádu $m \times n$, protože oba dva hráči mají obecně k dispozici rozdílný počet strategií. Řádky matic reprezentují strategie prvního hráče, sloupce potom strategie druhého hráče. První hráč má k dispozici m strategií a druhý hráč n strategií. Hodnoty v jednotlivých řádcích matice M tedy znamenají, kolik vydělá první hráč z maticové hry, pokud oponent použije j-tou strategii. Pole m_{ij} matice M je tedy suma, kterou vydělá první hráč, pokud zvolil strategii i a protivník mu odpověděl strategií j. Obdobně pole n_{ij} z matice N vypovídá o sumě, kterou vyhraje druhý hráč, který použil strategii j proti strategii i prvního hráče.

Fakt. *Nechť M, N jsou výplatní matice $M, N \in \mathrm{Mat_{mn}(T)}$, pro které platí*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} n_{ij},$$

potom říkáme, že ***maticová hra*** *definovaná výplatními maticemi M a N je* ***spravedlivá****, v opačném případě říkáme, že hra je* ***nespravedlivá****.*

Pokud je hra spravedlivá, můžeme říct, že oba dva hráči se během hry mohou obohatit o stejný počet kreditů, pokud je hra nespravedlivá, je jeden z hráčů jakoby automaticky diskriminován, jeho celková možná výhra je menší než protivníkova. Klasickým případem spravedlivé hry je dětská hra „kámen, nůžky, papír“. Její matice jsou uvedeny v tabulce 1..

1.1.1. Transformace výplatní matice

Z praktického hlediska obvykle transformujeme obě dvě výplatní matice M, N do jedné matice A. Přesněji řečeno, že výplatní matice A bude vztažena k jednomu z hráčů (nejčastěji k prvnímu). Matice A vzniklá tímto sloučením obou výplatních matic je tedy *relativně vztažená* k jednomu z hráčů.

Definice. *Nechť M, N jsou výplatní matice $M, N \in \mathrm{Mat_{mn}(T)}$, potom matice A, B řádu $m \times n$ definované vztahy*

$$A \overset{\text{def}}{=} M - N,$$
$$B \overset{\text{def}}{=} N - M,$$

představují ***výplatní matice*** *v maticové hře vztažené k prvnímu hráči (matice A) a k druhému hráči (matice B).*

Samozřejmě, že při práci s maticovou hrou dále používáme jen jednu z obou matic, nejčastěji matici A. Dále je nutné si uvědomit, že matice A představuje pro prvního hráče *matici výher* a pro oponenta *matici proher*, podobně matice B je pro prvního hráče maticí proher a pro druhého hráče maticí výher.

Dále se matice A a B upravují tak, aby se v nich nenacházely záporné hodnoty. Tento krok volíme z toho důvodu, že kdybychom při dalším zkoumání strategií hledali extrémy z násobků výplat, potom by mohly třeba dvě záporné výplaty, jejichž součin je kladný (což je sice po matematické stránce v pořádku, ale po stránce logické nikoliv), ovlivnit korektnost výpočtu. Proto, vyskytují-li se ve výplatních maticích záporné hodnoty, přičteme absolutní hodnotu nejmenší z nich ke všem prvkům matice, tím pádem se z minima stane nula a všechny další prvky budou mít hodnoty vyšší nebo rovny nule.

Úprava. Mějme výplatní matici $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ a nechť $A_{\min}$ definované vztahem

$$A_{\min} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} a_{ij},$$

označuje minimální hodnotu z prvků matice A. Pokud $A_{\min} < 0$, potom matici A transformujeme na matici $A' \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ podle následujícího vztahu:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n:\ a'_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_{ij} + |A_{\min}|.$$

V dalším textu budeme uvažovat výplatní matici $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$, kterou budeme považovat za výplatní matici vztaženou k prvnímu hráči, jejíž prvky jsou nezáporné.

1.1.2. Strategie

Jak už bylo řečeno, oba dva hráči vstupují do hry s určitým potenciálem svých strategií. Strategie pro prvního hráče (tj. řádky matice) se označují S_i a strategie druhého hráče (tj. sloupce matice) se označují S_j. Jednotlivé strategie můžeme mezi sebou porovnávat a pokusit se celou úlohu dále optimalizovat.

Definice. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je výplatní matice a nechť S_{i_1} a S_{i_2} jsou dvě různé strategie prvního hráče, potom pokud platí*

- $\forall j = 1, 2, \ldots, n:\ a_{i_1 j} > a_{i_2 j}$, *říkáme, že strategie $S_{i_1 j}$ **dominuje strategii** $S_{i_2 j}$, naopak strategie $S_{i_2 j}$ je **dominována strategií** $S_{i_1 j}$.*
- $\forall j = 1, 2, \ldots, n:\ a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$, *za předpokladu, že existuje alespoň jedno j, pro nějž je nerovnost ostrá, říkáme, že strategie $S_{i_1 j}$ je **lepší strategií** než $S_{i_2 j}$, naopak strategie $S_{i_2 j}$ je **horší strategií** $S_{i_1 j}$.*

Existence alespoň jedné ostré nerovnosti u předchozího bodu je nutná, protože jinak by byly strategie shodné. Úlohy se dají optimalizovat pomocí vyřazování dominovaných strategií a podobně. Podrobněji tuto problematiku rozebereme v dalších kapitolách.

1.2. Výběry strategií

Na vhodném výběru strategie záleží celý další osud naší hry. Naší motivací je nalézt takovou strategii, která je pro nás co nejvýhodnější. Hodně při tom záleží na inteligenci protivníka. V této kapitole budeme předpokládat, že hrajeme hru vůči inteligentnímu protihráči. Oba dva hráči se tedy budou snažit co nejvíce se obohatit na úkor protivníka.

Obvykle se maticová hra hraje opakovaně. Označíme si h_1 jako řádkový vektor o m složkách, což je vektor náležející prvnímu hráči, jehož složky označují *počty opakování jednotlivých strategií*. Obdobně zavedeme sloupcový vektor h_2 o n složkách, označující počty opakování jednotlivých strategií u druhého hráče. Při řešení maticové hry se snažíme, aby platilo:

$$\begin{aligned} h_1 \cdot A &= \omega_1, \\ A \cdot h_2 &= \omega_2. \end{aligned}$$

Vektory ω_1 a ω_2 označují optima. Výše uvedené vztahy by měly platit současně. Je možné celou situaci vyjádřit jedním vztahem:

$$h_1 \cdot A \cdot h_2 = \omega,$$

kde číslo ω je tzv. **celková cena hry**, což je objem kreditů, které se zúčastnily maticové hry. I zde se obecně snažíme nalézt optimum.

1.2.1. John von Neumannova teorie

V celku velice jednoduchou myšlenku formuloval ve své teorii her americký matematik John von Neumann[1]. Tato myšlenka vychází z používání strategie, ve které je přítomno pole a_{ij}, které je z pohledu prvního hráče nejvýhodnější. Předpokládáme, že protihráč je inteligentní a na naši strategii nám odpoví takovou strategií, abychom se co nejméně obohatili. Kdybychom si spočítali ty nejhorší protistrategie ke každé strategii a stanovili maximum z takto získaných hodnot, strategie, které by toto maximum náleželo, by byla pro nás klíčovou.

Od podobné úvahy se odvíjí tzv. teorie „maximinu“ a „minimaxu“. Předpokládejme, že jsme první hráč, potom budeme naši strategii stanovovat pomocí „maximinu“, z pohledu protivníka ji budeme stanovovat pomocí „minimaxu“.

- **maximin**: Nechť x je číslo definované vztahem

  $$x \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} a_{ij},$$

  potom x označuje maximální hodnotu ze všech minimálních výplat pro každou strategii prvního hráče S_i. Nechť toto maximum z minim náleží strategii S_{i_0}, potom S_{i_0} je hledaná strategie pro prvního hráče.

- **minimax**: Nechť y je číslo definované vztahem

  $$y \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i=1}^{m} \operatorname*{Max}_{j=1}^{n} a_{ij},$$

  potom x označuje maximální hodnotu ze všech minimálních výplat pro každou strategii prvního hráče S_i. Nechť toto minimum z maxim náleží strategii S_{i_0}, potom S_{i_0} je hledaná strategie pro druhého hráče.

Protihráč stanovuje svoji strategii pomocí „minimaxu“ proto, že výplatní matice je vztažena k prvnímu hráči (druhý hráč se tedy snaží najít ze všech výher prvního hráče tu nejmenší),

[1] spolupracoval s ním Oskar Morgenstern

pokud by tomu bylo naopak, bude první hráč stanovovat strategii minimaxem a druhý maximinem. Strategii, kterou jsme stanovili pomocí maximinu nebo minimaxu nazýváme **čistá strategie**.

Fakt. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je výplatní matice, potom platí:*

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} a_{ij} \ \leq \ \min_{i=1}^{m} \operatorname*{Max}_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Definice. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je výplatní matice a nechť platí, že*

$$\operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} a_{ij} \ = \ \min_{i=1}^{m} \operatorname*{Max}_{j=1}^{n} a_{ij},$$

*potom všem prvkům a_{ij} matice A, pro které platí tato rovnost, říkáme **sedlové body** maticové hry.*

Předcházející definice nám nic neříká o tom, kolik v maticové hře může být sedlových bodů. Pravda je taková, že sedlový bod nemusí existovat, může existovat jeden nebo i více. Od sedlového bodu jsou odvozeny tzv. **ryzí strategie**. Ryzí strategie je taková strategie, která obsahuje sedlový bod. Ryzí strategie má velice zajímavé vlastnosti, pokud by například náš protivník používal ryzí strategii a my ne, hra by *vždy vedla k naší prohře*.

Stejně tak jako teorii „maximinu“ a „minimaxu“ můžeme uvažovat teorie „maximaxu“ nebo „miniminu“. Při bližším zkoumání je však jasné, že obě strategie jsou poněkud utopistické (alespoň pokud uvažujeme inteligentního protihráče).

- **maximax**: Pro maximax platí, že najde strategii s největší výplatou (z pohledu prvního hráče). Pokud však náš protihráč nese alespoň částečné stopy inteligence, potom by nám jako protistrategii určitě nenabídl takovou, která by nám zajistila největší příjem.
- **minimin**: Tato strategie obsahuje největší prohru, kterou můžeme nabídnout, pokud máme inteligentního protihráče, rozhodně využije šance a jeho protistrategie bude taková, abychom přišli o co nejvíce. Používání „miniminu“ vede k „nejrychlejší prohře“.

Pokud v naší maticové hře neexistuje sedlový bod, a tudíž ani ryzí strategie, můžeme se pokusit úlohu dále **optimalizovat**. Optimalizací úlohy může vzniknout sedlový bod. Konkrétně můžeme *odstranit nejhorší nebo dominované strategie* z matice, tímto zásahem do matice může vzniknout sedlový bod.

1.2.2. Smíšené strategie

Další metodou, jak řešit problém maticové hry, je využití tzv. **smíšených strategií**. Při volbě jednotlivých strategií se řídíme zkušeností, kterou jsme nabyli v předchozích hrách. Snažíme se analyzovat výše výher spojené s konkrétním opakováním určitých strategií a používat řekněme několik vhodných strategií. Je samozřejmé, že použití smíšených strategií má smysl jen tehdy, pokud se *hra opakuje*. Čím více se hra opakuje, tím věrnější obraz o ní můžeme získat. Ve hře, která se hraje jen jednou, bychom měli použít ryzí strategii (pokud ve hře existuje).

Fakt. *Každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích.*

Pokud máme řádkový vektor $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, jehož jednotlivé složky jsou počty opakování jednotlivých strategií, potom si můžeme vyjádřit vektor $h \cdot A$, součet složek tohoto vektoru je číslo ω. Dále si můžeme vyjádřit číslo ω' jako

$$\omega' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\sum_{i=1}^{m} h_i},$$

což představuje **průměrnou cenu hry**. Při další volbě strategií se tedy můžeme orientovat pomocí této ceny hry, pokud cena vzroste, naše strategie byly úspěšnější než předcházející a naopak. Jinými slovy, snažíme se volit opakování strategií v závislosti na našich předešlých úspěších tak, aby průměrná cena hry rostla.

Někdy bývá zvykem vyjadřovat počty opakování jednotlivých strategií relativně. Pro počty opakování jednotlivých strategií platí nerovnost:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m: \ 0 \leq \frac{h_i}{\sum_{j=1}^{m} h_j} \leq 1,$$

proto můžeme jednotlivá opakování vyjadřovat vektorem $h^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_m^*)$, jehož složky jsou definovány:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m: \ h_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_i}{\sum_{j=1}^{m} h_j}.$$

Pro vektor h^* platí, že součet jeho složek je roven jedné, symbolicky zapsáno:

$$\sum_{i=1}^{m} h_i^* = 1.$$

Výše uvedené pravděpodobnostní vyjádření opakování jednotlivých strategií nám ovšem nepodává reálnou výpověď o výhrách, výsledky $h^* \cdot A$ nebudou obsahovat reálné hodnoty. Pokud by používané strategie byly zhruba v rovnováze, můžeme s nimi zacházet jako s ryzími strategiemi. Při používání jednotlivých strategií si také můžeme budovat žebříček jednotlivých strategií podle jejich *priorit*. Při budování tohoto žebříčku můžeme postupovat následovně:

1. Na počátku existuje výplatní matice $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ a prázdná uspořádaná indexová m-tice $I = \emptyset$.

2. V matici A najdeme všechny *čisté strategie* a přidáme je do I. Matici A upravíme tak, že z ní všechny čisté strategie vyjmeme.

3. Dále pokračujeme předešlým bodem tak dlouho, dokud máme k dispozici strategie pro prvního hráče.

Uspořádaná n-tice I obsahuje indexy jednotlivých strategií podle jejich „výhodnosti“, touto konstrukcí (tj. konstrukce postupnou eliminací strategií z matice) seřadíme jednotlivé strategie a při jejich používání se můžeme orientovat pořadím.

1.2.3. Další typy úloh

Teorie her zahrnuje celou řadu úloh, jejichž detailní popis by vydal za samostatnou publikaci (respektive několik desítek publikací). Například speciálním typem strategických her jsou hry, kdy nám není úplně známa výplatní matice, tzv. **hry s neúplnou informací**, doposud jsme uvažovali pouze **hry s úplnou informací**, tj. výplatní matice byla známa.

Dalším a ne méně zajímavým strategickým problémem jsou hry, ve kterých se hráči *střídají v tazích*. Klasickým případem jsou hry jako šachy, dáma a podobně. Jeden hráč hraje až po tahu druhého hráče, tahy se většinou opakují, dokud nedojde k celkové destrukci jednoho hráče. Celou problematiku strategie v těchto hrách lze přehledně modelovat na počítačích nelineárními datovými strukturami — stromy.

Strategie ve stromech. Teorii o modelování strategií pomocí stromů publikoval Claude Shannon, tato základní teorie slouží dodnes ke konstrukci šachových programů nebo strategických her, ve kterých se střídají hráči po tzv. **půltazích**. Tato teorie se opírá o princip „maxinimu" a „minimaxu".

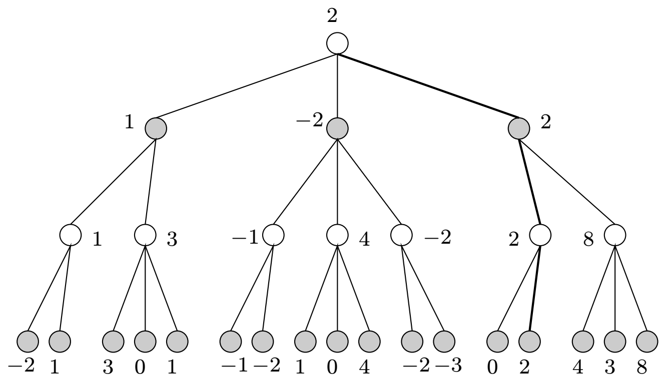
K nalezení tahu v aktuálním stavu hry (např. postavení figur) se procházejí všechny možné varianty stromu hry, které mohou být odvozeny od tohoto tahu. Průchod jde do stanovené hloubky stromu, kde se nacházejí *terminální uzly*, pomocí *ohodnocovací funkce* se ohodnotí stavy hry v terminálních uzlech a pomocí „maximinu" a „minimaxu" se převedou do kořene stromu. Tím získáme cestu k možnému tahu.

Kvalita výběru strategie je závislá na hloubce prohledávání stromu, ale i na robustnosti ohodnocovací funkce, ta musí brát v potaz jednak mohutnost hry, ale i pozice figur, které jsou provázány se svými váhami.

Použití maximinu při průchodu stromem. Při stromovém prohledávání možných tahů hry je při implementaci často kladen důraz na jeho rychlost. Na rychlosti je závislá hloubka stromu, kterou jsme schopni prohledat za konstantní čas t. Optimální by samozřejmě bylo, kdybychom mohli již v prvním uvažovaném tahu hry prohledat celou stromovou strukturu a udělat komplexní analýzu celé hry. Například šachová hra je podle 50-ti tahového pravidla FIDE omezená, proto by šla teoreticky celá analyzovat, bohužel jen teoreticky. Použitím „maximinu" a „minimaxu" můžeme procházet strom hry od konkrétní hloubky, celá procedura je rekurzivní.

Úmluva. V následujícím výkladu budeme používat následující označení a úmluvy:

- Kořen stromu je *bílý*, tj. na tahu je první hráč.
- Každá hladina stromu náleží jednomu hráči (hráči se střídají po tazích).
- Listy stromu jsou terminální tahy, je-li n hloubka stromu, potom se v hloubce n nacházejí pouze terminální uzly.
- Množina M označuje konečnou nosnou množinu, na které je definována irreflexivní, asymetrická, antisymetrická relace μ. Symboly m_i označují ohodnocení stavu hry v každém uzlu.
- Ohodnocení stavu hry m_i je vztaženo vůči bílému hráči vzestupně.



Obrázek 1. Strategie ve stromu

Ohodnocovací funkce přidělí terminálním uzlům ohodnocení, dále postupujeme směrem do kořene stromu a ohodnocujeme i interní uzly stromu následovně:

- V j-tých *bílých uzlech*, tj. uzlech prvního hráče, bude ohodnocení rovno maximu ze všech ohodnocení následujících uzlů:

$$m_j \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Max}_{\forall i | i \succ j} m_i.$$

- V j-tých *černých uzlech*, tj. uzlech druhého hráče, bude ohodnocení rovno minimu ze všech ohodnocení následujících uzlů:

$$m_j \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\forall i | i \succ j} m_i.$$

Tímto jednoduchým algoritmem dosáhneme kořene (který je bílý) a pomocí „maximinu“ stanovíme následující strategii, což bude taková strategie, která přísluší potomku kořene s maximálním ohodnocením. Celá situaci je vystižena na obrázku 1.[2].

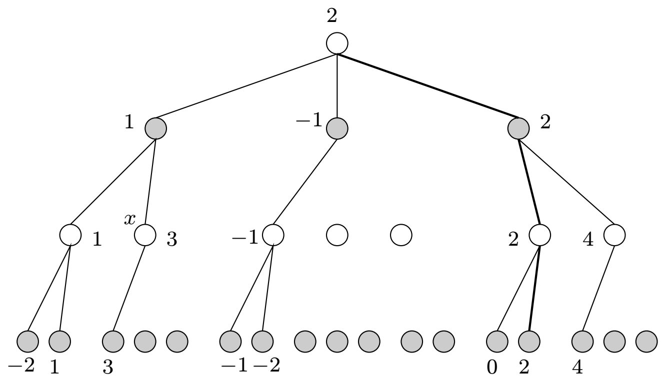
α–β **prohledávání stromu.** Při prohledávání stromu „maximinem“ jste si možná všimli toho, že není nutné prohledávat všechny možné podstromy, některé z nich totiž nemohou ovlivnit další průběh prohledávání. Tento nedostatek může odstranit tzv. α–β **metoda** prohledávání stromu.

Metoda je založena na myšlence neprocházení takových podstromů celého stromu hry, které neovlivní nalezení nejlepšího tahu v kořeni hry. Oproti metodě „maximin“ lze při vhodném pořadí procházených uzlů možno docílit toho, že projdeme jen $\sqrt{m}$ uzlů namísto celkových m uzlů[3]. Pro každý uzel si při průchodu budeme uchovávat interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, což je odhad nejhoršího a nejlepšího ohodnocení, jaké může daná pozice dostat.

- Hodnota α představuje *nejhorší* ohodnocení.
- Hodnota β představuje *nejlepší* ohodnocení.

[2]převzato z článku viz [3]

[3]toto je obecně nejlepší případ, v tom nejhorším dopadneme stejně jako při použití „maximinu“



Obrázek 2. α–β metoda prohledávání

V uzlech potom můžeme zkoumat, jestli např. nebude ohodnocení větší než β, této strategii se může protihráč vyhnout a my nemusíme dál kalkulovat další tahy, je-li ohodnocení pozice menší než α, můžeme se mu vyhnout my (první hráč).

Názorná demonstrace je na obrázku 2.. Například v uzlu označeném x je ohodnocení rovno 3, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, proto už dále neprohledáváme potomky tohoto uzlu. Při konstrukci strategií existuje celá řada dalších podpůrných analýz a heuristik, zájemce odkazuji na [3].

1.3. Hry proti přírodě

Hry proti přírodě jsou specifickou kapitolou maticových her. Jako oponent nám figuruje sada jevů (strategií), které jsou voleny více, či méně náhodně. Našemu protihráči říkáme **příroda** právě proto, že se chová řekněme náhodně, přírodou jsou tedy myšleny existující vnější jevy, které se vyskytují s určitou *pravděpodobností*, přičemž *přírodě* jako druhému hráči nezáleží na výsledku.

V matici A budou tedy sloupce označovat **strategie přírody**. Prvkům přírody přidělujeme jejich *četnost výskytu*, tj. počet výskytu konkrétního jevu z celkového počtu všech výskytů. Četnost převádíme na pravděpodobnost a dále s ní pracujeme v tomto tvaru. Nechť c_j označuje četnost výskytu j-té strategie přírody, potom vektor v, jehož složky jsou definovány vztahem

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n: \ v_j \overset{\text{def}}{=} \frac{c_j}{\sum_{i=1}^{n} c_i},$$

nazýváme **váhový vektor** strategií přírody. Pro součet jeho složek platí:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Váhový vektor nám tedy označuje pravděpodobnost, že příroda použije tu, či onu strategii. Způsoby konstrukce vah jsou popsány podrobněji v kapitole 2.5.1.. Máme-li stanoven váhový vektor, můžeme podle něj upravit výplatní matici.

Definice. *Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je výplatní matice a nechť v je n složkový váhový vektor, potom se matice A^V definovaná vztahem*

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n: \ a_{ij}^V \overset{\text{def}}{=} a_{ij} \cdot v_j,$$

nazývá ***výplatní matice vzniklá vyvážením*** *matice A pomocí váhového vektoru v.*

1.3.1. Kritéria her proti přírodě

Pomocí těchto kritérií hledáme optimální strategii při hře proti přírodě. Nezáleží přitom na tom, jestli pracujeme s vyváženou nebo nevyváženou výplatní maticí. Klasickým případem hry proti přírodě je dilema obchodníka na břehu slunné pláže, který se snaží co nejvíce vydělat. Přírodou (tedy jeho protihráčem) jsou jevy jako počasí, ropné skvrny na moři a podobně. Tyto jevy mají obecně různou pravděpodobnost výskytu. Obchodníkovy strategie tvoří sortiment, který může prodávat. Pomocí kritérií her proti přírodě může zvolit takovou strategii, která mu přinese co možná největší zisk.

d'Alembertovo kritérium. Toto kritérium je založeno na vybírání strategie s nejvyšší průměrnou výplatou. Spočteme výplaty pro každou strategii prvního hráče a stanovíme jejich aritmetický průměr, největší z nich náleží hledané strategii S_{i_0}, symbolicky zapsáno:

$$i_0 \;=\; \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}.$$

Hurwitzovo kritérium. Hurwitzovo kritérium se opírá o odhad prvního hráče (tj. náš odhad) o výsledku celé hry proti přírodě. Nejprve definujeme číslo α, pro které platí

$$\alpha \in \langle 0, 1 \rangle \,,$$

toto číslo nazýváme **pravděpodobnost vítězství** a označuje *míru optimismu* prvního hráče, že vyjde z hry proti přírodě jako vítěz. Pokud je hráč pesimista, bude $\alpha < 0.5$, naopak třeba hodnota $\alpha = 0.8$ signalizuje vysokou pravděpodobnost výhry nad přírodou.

Dále vybereme nejlepší a nejhorší případy pro každou naši strategii, symbol a_{ij_0} označuje nejmenší hodnotu v i-té strategii a a_{ij_1} označuje největší hodnotu v j-té strategii:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \ldots, m: \;\; a_{ij_0} \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \min_{j=1}^{n} a_{ij}, \\ a_{ij_1} \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \operatorname*{Max}_{j=1}^{n} a_{ij}. \end{aligned}$$

V tento okamžik vybíráme strategii podle následujícího vztahu

$$i_0 = \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} (\alpha \cdot a_{ij_1} + (1-\alpha) \cdot a_{ij_0}).$$

Z výše uvedeného vztahu je patrné, že pokud jsme více optimističtí, výběr probíhá více podle větších (a zároveň optimističtějších) hodnot, v opačném případě se dává větší důraz na menší hodnoty, výraz $(1-\alpha)$ vyjadřuje komplementární pravděpodobnost.

Waldeovo kritérium. Kritérium slouží k vytvoření nové výplatní matice A^W, kterou můžeme posléze zpracovat jinými kritérii, např. „maximinem“, „maximaxem“, d'Alembertovým kritériem a podobně. Myšlenka vychází ze sestrojení matice *odchylek od průměrnosti* v každé strategii. Nová matice má tvar:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \; \forall j = 1, 2, \ldots, n: \; a_{ij}^W \;\stackrel{\text{def}}{=}\; a_{ij} - \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}}{n}.$$

Savageovo kritérium. Spočívá ve vytvoření matice ztrát podle nejhorších proher přírody v rámci každé její strategie a následném výběru nejmenší ztráty. V prvním kroku stanovíme maximální prohry přírody, které budeme označovat $a_{i_0 j}$:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n: \ a_{i_0 j} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

V dalším kroku vytvoříme novou výplatní matici A^S, jejíž prvky a^S_{ij} jsou definovány vztahem

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n: \ a^S_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{i_0 j} - a_{ij}.$$

Nová matice nám nyní vyjadřuje naše ztráty, když použijeme i-tou strategii proti přírodě. Dále používáme předchozí metody ke stanovení konkrétní strategie s tím, že vždy musíme hledat ve výplatní matici **minima**, protože se jedná o naše ztráty.

2. Multikriteriální výběry

V reálném světě jsme často postaveni před problém, ve kterém se máme rozhodnout mezi několika alternativami řešení problému na základě jejich vlastností, kterých je obecně více. Úlohy, které se snaží řešit tento problém jsou úlohy o *multikriteriálních výběrech*. Na počátku existují nějaké *alternativy*, mezi kterými jsme nuceni si vybrat (zpravidla pouze jednu). Obecně se dá říct[4], že alternativy jsou spolu v *konfliktu*. Každou alternativu můžeme posuzovat podle řady *kritérií*. Naším úkolem je vybrat tu alternativu, která je z hlediska kritérií nejlepší.

Klasickým případem je například výběr lokality pro stavbu továrny. Lokality jsou pro nás alternativy a kritérii mohou být například výkon, záběr zemědělské půdy, vliv na ekologii, cena a tak dále. Na první pohled je jasné, že kritéria mohou mít diametrálně odlišný charakter, ať už z pohledu jejich extremalisace nebo z pohledu jednotkového systému.

2.1. Model úlohy

Při řešení úlohy se rozhodujeme o výběru zpravidla jedné **alternativy** z množiny všech možných alternativ. Množina A je m-prvková množina všech alternativ vstupujících do úlohy, jednotlivé alternativy označujeme a_i. Každou alternativu posuzujeme tzv. kritérii, **kritérium** je tedy jedna elementární vlastnost každé alternativy. Množina všech kritérií se označuje K a má obecně n prvků, jednotlivá kritéria označujeme k_j.

Dále je definovaná hodnota k_{ij} pro všechny kombinace alternativ a kritérií, to znamená, že každá alternativa má pro každé kritérium definovánu hodnotu. Hodnota k_{ij} značí ohodnocení i-té alternativy podle j-tého kritéria. Celou situaci popisujeme tabulkou viz obr. 2..

Jednotlivé hodnoty k_{ij} v tabulce mohou mít obecně různé vlastnosti. Některá kritéria mohou například vést k maximalizaci, jiná k minimalizaci (např. ušetřené prostředky a vynaložené prostředky). Při multikriteriálních výběrech se také musíme pohybovat v různých jednotkových systémech (např. čas, vynaložené prostředky, výkon ap.), proto se snažíme celou úlohu dále *normalizovat*.

[4] respektive, často to tak bývá

Tabulka 2. Multikriteriální úloha

	k_1	$\dots$	k_n
a_1	k_{11}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
a_m	$\vdots$		$\ddots$

2.1.1. Kritéria

Jak už bylo řečeno, na kritéria se můžeme dívat z několika pohledů, první z nich je druh extremalisace, další např. jednotkový systém. Kritéria si nyní rozdělíme do dvou disjunktních skupin, při jejich porovnávání budeme uvažovat dvě alternativy a_{i_1} a a_{i_2} náležející množině A a kritérium k_j:

- **maximalizační kritérium** je takové kritérium, pro které platí:

  $k_{i_1 j} > k_{i_2 j} \ \Rightarrow$ potom je alternativa a_{i_1} z pohledu kritéria k_j lepší než alternativa a_{i_2}. Množinu všech maximalizačních kritérií označujeme K_{Max}.

- **minimalizační kritérium** je takové kritérium, pro které platí:

  $k_{i_1 j} < k_{i_2 j} \ \Rightarrow$ potom je alternativa a_{i_1} z pohledu kritéria k_j lepší než alternativa a_{i_2}. Množinu všech minimalizačních kritérií označujeme $K_{\min}$.

To, že daná alternativa je lepší než druhá podle určitého kritéria, samozřejmě neznamená, že musí být lepší z hlediska všech kritérií zároveň. Jinak řečeno, u minimalizačního kritéria se snažíme hledat takové alternativy, které mají toto kritérium co *nejmenší*, u maximalizačního kritéria hledáme takové alternativy, které mají toto kritérium co *největší*.

Dále můžeme klasifikovat jednotlivá kritéria podle jednotek, které používají. Vedle *fyzikálních jednotek*, jako je např. čas výroby, výkon stroje a podobně, se můžeme setkat s jednotkami jako jsou peníze, procentuální vyjádření atd. Existují však kritéria, která můžeme těmito jednotkami posuzovat jen velice obtížně, jestli vůbec. Mezi taková kritéria patří například „vliv na životní prostředí“. V tuto chvíli můžeme rozdělit kritéria na další dvě skupiny, podle jejich jednotkového systému:

- **objektivní** jsou taková kritéria, jejichž jednotkový systém se zakládá na přesně měřitelných jednotkách.

- **subjektivní** jsou taková kritéria, která obvykle v praxi hodnotíme *verbálně*, tj. přidělujeme jim naše *subjektivní hodnocení.*

Výše uvedený vliv na životní prostředí může být například buďto „žádný“, „malý“ nebo „velký“. Tento verbální druh hodnocení musíme nějakým způsobem upravit, abychom s ním mohli v úloze pracovat. Můžeme jej například skalarisovat tím, že pro něj vytvoříme tzv. *škálu.*

Ohodnocovací škály. Pro subjektivní hodnocení zavádíme tzv. škály. Škálovací stupnice je vlastně *množina diskrétních hodnot*, které jsou vybrány určitým předpisem z daného intervalu. Jednotlivé hodnoty škály používáme namísto slovního nebo jiného subjektivního hodnocení kritérií.

Klasicky volíme škálu lineárně, i když to může být samozřejmě jinak. Konkrétně u modelového kritéria „vliv na životní prostředí" bychom mohli naši škálu volit např. kvadraticky, protože odstup od „velkého" a „malého" znečištění je zcela určitě větší než u „malého" a „žádného" znečištění[5]. Při použití *lineární škály* bývá zvykem označovat *lichými* hodnotami *hlavní hodnoty škály*, sudé hodnoty plní funkci pomocných hodnot pro případy, že si „nejsme jisti".

2.1.2. Normalizace kritérií

Při hledání alternativ určitě oceníme, pokud bude mezi kritérii panovat určitý řád. Všechna kritéria se pro lepší orientaci a snazší práci snažíme převést na jednotný systém extremalisace a normalizovat jejich jednotkový systém.

Jednotný systém extremalisace. Všechna kritéria v celé multikriteriální úloze převedeme buďto na *minimalizační* kritérium, nebo na *maximalizační* kritérium. Převod je založen na jednoduché myšlence. Máme-li například výkon zařízení (který chceme zřejmě maximální) a máme ho převést na minimalizační kritérium, potom jej vyjádříme jako „ztrátu na výkonu", kterou budeme chtít zřejmě co nejmenší. Celý postup lze vyjádřit následujícími několika kroky (předpokládejme, že chceme transformovat všechna maximalizační kritéria na minimalizační).

1. Vybereme maxima všech maximalizačních kritérií:

$$\forall j \in K_{\text{Max}} : \; k_{ij_0} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} k_{ij}.$$

2. Všechny maximalizační kritéria vyjádříme jako ztráty, tj. diferenci od maximální hodnoty, nové hodnoty jsou označeny k'_{ij}:

$$\forall j \in K_{\text{Max}}, \; i = 1, 2, \ldots, m : \; k'_{ij} \overset{\text{def}}{=} k_{ij_0} - k_{ij}.$$

Tím, že jsme původní kritéria vyjádřili pomocí ztrát, jsme docílili jednotného výběrového systému. Celý postup je analogický s transformací výplatní matice dle **Savageova kritéria** (viz. 1.3.1.). Obdobným způsobem se převádějí minimalizační kritéria na maximalizační.

2.1.3. Normalizace jednotkového systému

Jednotkový systém normalizujeme z jednoduchého důvodu — v reálných situacích by mohlo být složité porovnávat mezi sebou veličiny o různých jednotkách. Proto se snažíme transformovat všechny hodnoty v rámci každého kritéria na bezrozměrné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Takto skalarisované číslo se nazývá **ukazatel**. Postup normalizace jednotkového systému kritéria k_j je následující:

[5] nejsem ekolog, proto nesouhlasíte-li s mou úvahou, máte zcela jistě pravdu

1. Najdeme *maximální* a *minimální* použité hodnoty u kritéria k_j:

$$d_{j_0} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i=1}^{m} k_{ij},$$
$$d_{j_1} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} k_{ij}.$$

2. Všechny hodnoty k_{ij} v rámci kritéria k_j nyní nahradíme novými hodnotami k'_{ij}:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m: \ k'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_{ij} - d_{j_0}}{d_{j_1} - d_{j_0}}.$$

Výše uvedený postup normalizace je ve své podstatě automorfismus. Provedli jsme totiž zobrazení jednoho intervalu na druhý. Po provedení obou dvou normalizačních kroků získáme úlohu, jejíž tabulka se skládá ze skalárních hodnot $k_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$. Takové úloha je pro nás snadno zpracovatelná.

V tento okamžik můžeme popsat multikriteriální úlohu maticí M, pro niž platí $M \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Její řádky reprezentují alternativy a sloupce reprezentují kritéria. V dalším textu budeme předpokládat, že matice M definuje normalizovanou multikriteriální úlohu.

2.2. Alternativy

Při porovnávání alternativ hrají určitou roli jednotlivé hodnoty k_{ij}. Pomocí nich můžeme zjistit tzv. *hypotetické alternativy* a reálné alternativy můžeme srovnávat například podle toho, do jaké míry jsou hypotetickým alternativám podobné. Alternativy také mohou *dominovat* jedna druhou podobně, jako strategie v kapitole 1.1.2..

2.2.1. Hypotetické alternativy

Dvě základní hypotetické alternativy (tj. alternativy, které ve skutečnosti neexistují) jsou **optimální alternativa**, která by byla z pohledu našeho vícekriteriálního výběru nejlepší a **bazální alternativa**, což by naopak byla alternativa ze všech nejhorší. Bazální alternativa představuje bázi pohledu na celý multikriteriální výběr.

Definice. *Nechť A je n prvková množina existujících alternativ a K je m prvková množina všech kritérií a M je matice multikriteriální úlohy, potom se dvě alternativy definované vztahy*

$$a_O: \ \forall j = 1, 2, \ldots, m: \ k_{Oj} \stackrel{\text{def}}{=} 1,$$
$$a_B: \ \forall j = 1, 2, \ldots, m: \ k_{Bj} \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

nazývají ***optimální alternativa*** *(a_O) a* ***bazální alternativa*** *(a_B).*

Bazální a optimální varianta vždy existují, může jich být i víc (to v tom případě, že v rámci některého kritéria je víc nulových nebo jedničkových polí). Optimální a bazální varianta se používají např. v hvězdicovém modelu multikriteriální úlohy.

2.2.2. Dominování alternativ

Podobně jako u strategií můžeme úlohu (respektive alternativy) analyzovat pomocí jejich případných dominancí. Následující definice je analogická k definici z kapitoly 1.1.2..

Definice. *Nechť $M \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ definuje multikriteriální problém, a nechť a_{i_1} a a_{i_2} jsou dvě různé alternativy. Potom, když platí*

- $\forall j = 1, 2, \ldots, n: \ a_{i_1 j} > a_{i_2 j}$, *říkáme, že alternativa a_{i_1}* ***dominuje alternativě*** *a_{i_2}, naopak alternativa a_{i_2} je* ***dominována alternativou*** *a_{i_1}.*
- $\forall j = 1, 2, \ldots, n: \ a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$, *za předpokladu, že existuje alespoň jedno j, pro nějž je nerovnost ostrá, říkáme, že alternativa a_{i_1} je* ***lepší alternativou*** *než a_{i_2}, naopak alternativa a_{i_2} je* ***horší alternativou*** *a_{i_1}.*

V předešlé definici jsme předpokládali, že matice M je z hlediska výběru normalizována na maximalizační princip. V opačném případě (tj. kdyby se jednalo o minimalizační kritéria) by relační znaménka $<, >$ byla obrácená.

Multikriteriální úlohu můžeme upravit tak, že *vyřadíme* všechny *dominované* alternativy z množiny A. Dominované alternativy totiž logicky nemohou být řešením multikriteriálního výběru, protože prokazatelně existují „lepší" (respektive dominující) alternativy.

2.3. Okruhy problémů

Multikriteriální úlohy můžeme rozdělit do čtyř základních skupin podle jejich vlastností. V dalším textu se budeme zabývat pouze první variantou multikriteriálních úloh.

1. Naše informace o celé úloze, které jsme nabyli, umožňují *skalarisaci výběrového kritéria*, to znamená, že jsme schopni normalizovat celou úlohu, zapsat ji maticovým tvarem a dále řešit. Toto je nejprimitivnější případ.
2. Multikriteriální *výběry bez skalarisace* kritéria. V tomto případě nejde skalarisovat tak, jak jsme si uvedli v kapitolách o normalizaci. Celá úloha je tedy řešena v jejím „syrovém" tvaru.
3. Multikriteriální výběry s *neúplnou vstupní informací*. Řešení úloh je založené zpravidla na interakci s počítačem, doplňování kritérií je podřízeno sérii výpočtových úloh, často se také opírá o odhady expertů a podobně.
4. *Parametrické úlohy* jsou multikriteriální úlohy s parametry, hledání alternativ je obecně vyjádřeno v závislosti na parametrech.

2.4. Řešení multikriteriálních úloh

K řešení úloh prvního typu nám slouží několik nástrojů. Jednak můžeme úlohu optimalizovat před samotným řešením pomocí odstranění dominovaných alternativ, ale i při samotném řešení můžeme postupovat různě. Jedna z možností je určit nejlepší kritérium podle tzv. *hvězdicového modelu* nebo *válcového modelu*. Další cesta, kterou se můžeme ubírat je zkoumání vzájemných vztahů mezi alternativami pomocí operací z prostředí *fuzzy množin*.

Úmluva. V dalším textu budeme vždy předpokládat, že matice M byla z hlediska výběru převedena na *maximalizační* kritérium.

2.4.1. Hvězdicový model

Tento model multikriteriální úlohy se hodně používá mezi ekonomy, protože je velice jednoduchý. Celá multikriteriální úloha se zachycuje graficky do *hvězdicového diagramu*. Předpokládejme, že máme dánu úlohu maticí M, která je normalizovaná. Pro systém os hvězdicového diagramu platí následující vlastnosti:

- Vlastní systém má právě tolik *poloos*, kolik je v úloze kritérií (tj. n).
- Všechny poloosy začínají v bodě 0 (počátek) a svírají mezi sebou úhel $\gamma = \frac{360}{n}$ stupňů.
- Poloosy jsou voleny *normálně*, to znamená, že na všech poloosách je jednička ve stejné vzdálenosti od počátku.

Do takového systému souřadnic můžeme zakreslovat jednotlivé alternativy tak, že budeme postupně propojovat jejich hodnoty pro konkrétní kritéria v grafu. Tím se nám pro každou alternativu utvoří spojená křivka, graf je *uzavřený*. Bazální alternativa je v bodě 0, optimální alternativa tvoří pravidelný n-úhelník, který prochází jednotkovými body.

Úvaha. Je zřejmé, že každá alternativa zakreslená do grafu, uzavírá plochu o určitém obsahu. Přitom víme, že optimální alternativa uzavírá plochu s největším obsahem a bazální alternativa uzavírá plochu s nejmenším (nulovým) obsahem). Z toho můžeme odvodit, že hledaná nejlepší alternativa je taková, která má nejmenší odchylku od optima, symbolicky zapsáno:

$$a \;=\; \min_{i=1}^{m} S(a_O) - S(a_i).$$

Z výše uvedeného vztahu plyne, že vlastně hledáme alternativu s největším obsahem $S(a_i)$. Obsah plochy uzavřené jednou alternativou můžeme odvodit následovně:

$$\begin{aligned} S(a_i) \;&=\; \frac{1}{2}k_{i1}k_{i2}\sin\gamma \;+\; \frac{1}{2}k_{i2}k_{i3}\sin\gamma \;+\cdots+\; \frac{1}{2}k_{in}k_{i1}\sin\gamma \;= \\ &\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}k_{i(j+1 \bmod n)}\right). \end{aligned}$$

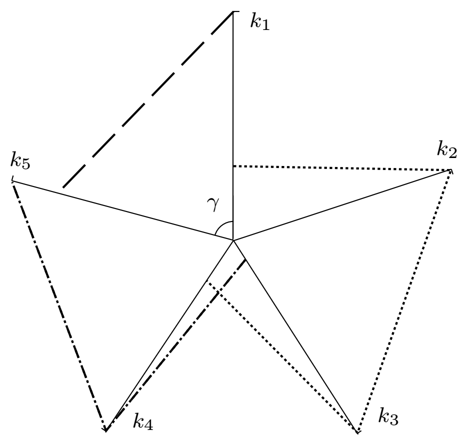
Důsledek. Index $j+1 \bmod n$ zajišťuje, aby byl poslední sčítanec roven $k_{in} \cdot k_{i1}$. Z hlediska maximalizace jsou pro nás konstantní výrazy nezajímavé, proto nejvhodnější alternativu a stanovujeme podle odvozeného vztahu:

$$a \;=\; \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \cdot k_{i(j+1 \bmod n)}.$$

Tento model má jednu nevýhodu. V předešlém vztahu figuruje součet součinů, což zjevně vede k tomu, že výsledek je ovlivněn permutací jednotlivých kritérií. Existují i jiné modely, které tento nedostatek napravují. V tabulce 3. je zadána jednoduchá normalizovaná multikriteriální úloha, její hvězdicový graf naleznete na obrázku 3..

Tabulka 3. Multikriteriální úloha — zadání

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
a_1	0.3	1	1	0.2	0
a_2	1	0	0	0	0.8
a_3	0	0	0.1	1	1



Obrázek 3. Hvězdicový model

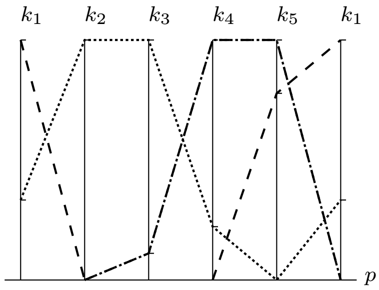
2.4.2. Válcový model

Válcový model multikriteriální úlohy odstraňuje výše zmíněný problém permutace jednotlivých kritérií. Úlohu zakreslujeme do tzv. *sloupcového grafu*, jedná se v podstatě o systém rovnoběžných os, které reprezentují jednotlivá kritéria. Válcový model vzal své jméno ze skutečnosti, že používaný souřadný systém je umístěn na válcové ploše. Mějme úlohu zadánu normalizovanou maticí $M \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Celý systém má následující vlastnosti:

- Vlastní systém má právě $n + 1$ *poloos* (označíme je např. y_j). Pro poloosy platí, že j-tá poloosa je poloosa kritéria číslo j mod n, jinak řečeno, poslední osa je osa prvního kritéria.
- Všechny poloosy mají počátek náležící téže přímce p a jsou mezi sebou navzájem rovnoběžné, jejich vzájemná vzdálenost je jednotková.
- Poloosy jsou voleny *normálně*, to znamená, že na všech poloosách je jednička ve stejné vzdálenosti od počátku a náleží stejné polorovině vzhledem k hraniční přímce p.

Znázornění jedné alternativy v grafu je analogické ke zobrazení v hvězdicovém grafu. Tento model bychom si mohli představit jako válcovou plochu, kde první a poslední poloosy splynou a křivka pro každou alternativu tak dosáhne uzavřeného tvaru.

Úvaha. I v tomto případě se snažíme nalézt alternativu s největší plochou ohraničenou grafem a osou x. Optimální alternativa má obsah roven $n + 1$, bazální alternativa má obsah nulový.



Obrázek 4. Válcový model

Obsah plochy pod grafem alternativy i můžeme vyjádřit vztahem:

$$S(a_i) = \frac{k_{i1} + k_{i2}}{2} + \frac{k_{i2} + k_{i3}}{2} + \cdots + \frac{k_{in} + k_{i1}}{2} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}.$$

Důsledek. Toto vyjádření je korektní, permutace kritérií neovlivní celkový výsledek. Chceme-li tedy stanovit nejlepší alternativu, hledáme maximum všech těchto součtů pro všechny alternativy, symbolicky zapsáno:

$$a = \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}.$$

Na obrázku 4. je zobrazena předešlá demonstrační úloha ve válcovém modelu. Možná jste si všimli, že se tento graf nápadně podobá grafu fuzzy množiny. Pravda je taková, že na jednotlivé alternativy se můžeme dívat jako na fuzzy množiny a pracovat s nimi pomocí fuzzy operací viz kapitola 2.4.4..

2.4.3. Priority alternativ

V některých situacích je vhodné, abychom si sestavili žebříček **priorit alternativ**, to je užitečné zejména v případě, že máme stanovit pevný počet nejlepších alternativ a podobně. Triviálně bychom mohli pořadí alternativ zkonstruovat tak, že vytvoříme sumy z jejich hodnot a alternativy následně podle těchto sum setřídíme. Nabízí se nám však odlišný způsob, který v některých případech může vést k lepšímu výsledku.

Tato *rozšířenou metodu* hledání žebříčku priorit je založena na myšlence *postupné eliminace* nejlepších alternativ z matice M tak dlouho, dokud není počet alternativ $m = 0$. Proces lze popsat následovně:

1. Na počátku existuje prázdná uspořádaná indexová m-tice $I = \emptyset$.
2. Najdeme nejlepší alternativu a_i z M, nalezenou alternativu (respektive její index) přidáme do uspořádané m-tice.
3. Alternativu a_i eliminujeme z M. Dále pokračujeme předešlým bodem, dokud existují v M nějaké alternativy.

Poznamenejme, že pokud vyřadíme tu či onu alternativu z M, musíme de facto matici M znovu vybudovat (tj. znormalizovat) z původního zadání, abychom docílili efektu. Kdybychom tuto operaci neprovedli, pořadí získané tímto způsobem by bylo totožné s pořadím vzniklým pouhým seřazením sum na řádcích matice M.

2.4.4. Použití fuzzy technologií

Na normalisované alternativy (respektive jejich hodnoty) se můžeme dívat jako na **fuzzy množiny**. Všechny hodnoty matice M, tj. k_{ij} náleží intervalu $\langle 0, 1\rangle$, což symbolizuje míru příslušnosti k fuzzy množině.

Označení. Nechť A je m prvková množina alternativ a K je n prvková množina kritérií. Alternativy můžeme chápat jako fuzzy množiny, hodnoty k_{ij} chápeme jako *míru příslušnosti* k j-tému prvku u i-té alternativy. Alternativy můžeme zapsat jako:

$$a_i = \{k_1^{k_{i1}}, k_2^{k_{i2}}, \ldots, k_n^{k_{in}}\},$$

což je regulérní fuzzy množina. Symboly k_j označují její prvky, jejich horní indexy, tj. čísla k_{ij} jsou míry příslušnosti.

V tomto okamžiku jsme schopni pracovat s alternativami jako s fuzzy množinami, provádět mezi nimi rozličné fuzzy operace, v případě nutnosti třeba i dodefinovat operace vlastní. Některé fuzzy operace mají z hlediska použití v oblasti alternativ zajímavé vlastnosti. Tady jsou některé z nich.

- **komplement** ($\overline{a_i}$) neguje alternativu. Výsledkem negace alternativy je alternativa (obecně hypotetická) opačná. Negaci bazální alternativy dostaneme optimální alternativu a podobně.
- **sjednocení** ($a_{i_1} \cup a_{i_2}$) — sjednocením alternativ získáme alternativu, která má u jednotlivých kritérií vždy *větší* hodnoty z obou alternativ.
- **průnik** ($a_{i_1} \cap a_{i_2}$) — průnikem alternativ získáme alternativu, která má u jednotlivých kritérií vždy *menší* hodnoty z obou alternativ.
- **extra součin** ($a_{i_1} \otimes a_{i_2}$) signalizuje míru zastoupení kritérií v obou alternativách současně.
- **extra součet** ($a_{i_1} \oplus a_{i_2}$) signalizuje míru zastoupení kritérií alespoň v jedné z alternativ.
- **omezený rozdíl** ($a_{i_1} \ominus a_{i_2}$) je *výpověď o dominanci* alternativy a_{i_1} nad alterativou a_{i_2}. Čím výrazněji dominuje a_{i_1} alterativě a_{i_2}, tím větší mají prvky výsledného omezeného rozdílu míru příslušnosti. Pokud by alespoň jeden prvek omezeného rozdílu byl ztracený, potom a_{i_1} nedominuje a_{i_2}.
- **silný symetrický rozdíl** ($a_{i_1} \oslash a_{i_2}$) je definován jako průnik omezených rozdílů, tím pádem je komutativní a můžeme říct, že dává výpověď o příbuznosti obou alternativ. Použitím tohoto rozdílu můžeme vytvořit *metriku* alternativ.

Závěr. Použití fuzzy technologií je vhodné zejména ve spojení s interakcí člověka s počítačem. Výsledné alternativy se mohou stanovit pomocí série dotazů na jejich vlastnosti. K výše uvedeným operacím je možné dodefinovat další, podle potřeby v konkrétní situaci.

2.5. Váhy kritérií

V praxi se často setkáváme s tím, že jednotlivá kritéria nemají úplně stejnou váhu. Jinak řečeno, jedno kritérium je protěžováno na úkor ostatních a podobně. Například při stavbě továrny je mnohem důležitější její cena a výkon než vliv na životní prostředí[6]. Z tohoto důvodu zavádíme tzv. **váhy kritérií**, což jsou koeficienty definované pro každé kritérium, které nám upraví jeho váhu v rámci celé úlohy.

Definice. *Nechť $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je vektor z vektorového prostoru V nad číselným tělesem T. Pokud platí*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \ \wedge \ \forall i = 1, 2, \dots, n: \ v_i \in \langle 0, 1 \rangle ,$$

potom říkáme, že vektor v je ***váhový vektor*** *o n složkách.*

Pomocí váhového vektoru můžeme vyvážit matici multikriteriální úlohy M tak, že všechny hodnoty v každém jejím j-tém sloupci vynásobíme j-tou složkou vektoru v, tedy číslem v_j, symbolicky zapsáno:

$$\forall i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n: \ m'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} m_{ij} \cdot v_j .$$

Hodnoty m'_{ij} představují nové hodnoty, které jsou již vyvážené.

V tento okamžik si všimněte, že aplikací vah do multikriteriální úlohy se obecně poruší pravidlo, které až do teď platilo, že v rámci každého j-tého kritéria existuje alespoň jedna alternativa a_{i_1}, pro kterou platí $k_{i_1 j} = 1$ a alespoň jedna alternativa a_{i_2}, pro kterou platí $k_{i_2 j} = 0$. Tento poznatek by mohl vést k myšlence provedení opětovné transformace[7] v rámci každého kritéria. Tato myšlenka je ovšem lichá, dostali bychom se pomocí ní zpět do původního stavu před vyvážením.

Po aplikaci vah na matici úlohy M pracujeme s úlohou jako doposud. Jiná možnost je pracovat s původními údaji, ale při hledání vhodných alternativ musíme upravit existující vztahy například takto:

$$\begin{aligned} a &= \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \cdot k_{i(j+1 \bmod n)} \cdot v_j \cdot v_{j+1 \bmod n}, \\ a &= \operatorname*{Max}_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \cdot v_j . \end{aligned}$$

První vztah je upravený vztah pro hvězdicový model, druhý je vztah pro válcový model. Práce se vztahy v tomto tvaru je možná o něco vhodnější právě z důvodu pravděpodobné ztráty nul a jedniček v rámci jednotlivých kritérií.

2.5.1. Konstrukce vah

Přiřazení věrohodné váhy každému kritériu může být problém. Existuje celá řada konstrukcí, kterak můžeme pro jednotlivá kritéria stanovit váhy. V následujícím textu najdete některá z nich. Při výkladu uvažujeme úlohu zadanou maticí $M \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$.

[6] alespoň v naší společnosti to tak zatím funguje

[7] opětovné převedení hodnot na interval $\langle 0, 1 \rangle$

Naivní konstrukce. Tento typ konstrukce se opírá o předem stanovené pořadí jednotlivých kritérií podle jejich důležitosti. Každému kritériu přiřadíme jeho pořadí a dále pomocí něj stanovíme jeho váhu. Tato metoda nedává moc přesvědčivou výpověď o vztahu mezi jednotlivými kritérii, kalkulujeme totiž pouze s jejich pořadím, nijak nekvantifikujeme jejich vzájemné příbuznosti či odlišnosti, také proto je tato metoda nazývána **naivní konstrukce**. Stanovení váhového vektoru je zachyceno v následujících krocích:.

1. Vytvoříme n-složkový *vektor pořadí kritérií* p, každá jeho složka p_j obsahuje pořadí j-tého kritéria, podle jeho důležitosti (nejdůležitější kritérium má pořadí 1, nejméně důležité n).

2. Stanovíme váhový vektor v, jeho složky jsou definovány vztahem:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n : \; v_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \cdot (n - p_j + 1)}{n \cdot (n+1)},$$

Tento vztah je odvozen od součtu prvních n prvků aritmetické posloupnosti. Naivní konstrukce ve své podstatě vychází z následující metody s tím rozdílem, že bodové hodnocení je v tomto případě nahrazeno opačným pořadím jednotlivých kritérií.

Konstrukce pomocí obodování kritéria. Tato metoda je obdobou k předcházející metodě s tím rozdílem, že nyní se neomezujeme pouhým pořadím kritérií, ale každému kritériu přidělíme tzv. **bodové hodnocení**. Bodové hodnocení je číslo, definované pro každé kritérium, kritérium s vyšším obodováním je důležitější než kritérium s nižším obodováním. Postup konstrukce je následující:

1. Vytvoříme n-složkový *bodovací vektor* b, jehož složka b_j je číslo, definující bodové ohodnocení pro kritérium k_j.

2. Nyní vyjádříme složky váhového vektoru podle vztahu:

   $$\forall j = 1, 2, \ldots, n : \; v_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_j}{\sum_{k=1}^{n} b_k},$$

   tento vztah zajišťuje, že všechny složky váhového vektoru budou z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Tento, ani předešlý princip konstrukce nám však nedávají žádný nástroj k tomu, kterak určit, které kritérium je důležitější než jiné a podobně. V reálné situaci si často ani sám zadavatel úkolu není příliš jistý, co se priorit kritérií týče. Tento problém mohou vyřešit následující metody.

Použití relace významnosti. Jednotlivá kritéria můžeme mezi sebou porovnávat a posuzovat, zdali je jedno důležitější než druhé. K tomuto účelu si můžeme vybudovat relaci κ na množině K, relace κ musí být *irreflexivní*, *asymetrická* a *antisymetrická*.

Definice. *Nechť K je n prvková množina kritérií, potom relace κ na množině K, jejíž relační predikát je vztah:*

$$(k_{j_1}, k_{j_2}) \in \kappa \;\Rightarrow k_{j_1} \text{ je významnější než } k_{j_2},$$

*se nazývá **relace významnosti kritérií**.*

Tabulka 4. Fullerův trojúhelník

1	2	3	4	5
$\underline{2}$	$\underline{3}$	4	5	
3	4	$\underline{5}$		
$\underline{4}$	5			
5				

Fakt. *Nechť κ je relace významnosti kritérií na množině K, potom pořadí jednotlivých kritérií dle jejich významnosti je právě takové pořadí, které vznikne aplikací kvaziordinální funkce na relaci κ.*

Při praktické realizaci zpravidla vytvoříme tabulku, do které zaznamenáváme relaci. Poté použijeme kvaziordinální funkci[8], abychom zjistili pořadí jednotlivých entit z K. Dále můžeme stanovit vlastní váhy pomocí *naivní konstrukce* nebo například jednotlivá kritéria dodatečně obodovat a podobně.

Fullerův trojúhelník. Fullerův trojúhelník je založen na párovém srovnávání jednotlivých kritérií, je to více metoda názorná než matematická. Nejprve musíme zkonstruovat vlastní trojúhelník, ve kterém posléze značíme vzájemné vztahy kritérií.

1. Sestrojíme **Fullerův trojúhelník**. Na řádek si zapíšeme čísla všech kritérií. Pod každé číslo napíšeme do sloupce všechna ostatní větší čísla kritérií. Příklad trojúhelníku je na obrázku 4..

2. Nyní srovnáváme čísla v rámci každého sloupce. Pokud je kritérium ve sloupci významnější než první kritérium (nad čarou), potom jeho číslo označíme a pokračujeme dále. V našem příkladě jsou významnější kritéria podtržená.

3. Pro každé kritérium (tedy sloupec) vytvoříme součet všech nepodtržených čísel, které se v daném sloupci nacházejí. Tato čísla chápeme jako *bodové hodnocení*, proto dále pokračujeme metodou konstrukce vah pomocí obodování kritéria.

Saatyho matice. Tato metoda je založena na myšlence nalezení **vlastního vektoru** příslušného vlastní hodnotě ze Saatyho matice. Nejprve musíme vytvořit úplnou ohodnocenou relaci škál. Postup je následovný:

1. **Vybudování Saatyho matice.**

   Vytvoříme ohodnocenou relaci κ na množině K. Tuto relaci budeme zapisovat v maticové formě z důvodu přehlednosti (označení matice S^{κ}). Relace κ musí mít následující vlastnosti:

   - relace κ je *úplná*

[8]pokud relace nepůjde qasiordinalisovat, zřejmě jsme uvedli do tabulky konfliktní hodnoty (např. symetrii ap.)

- hranové ohodnocení relace se skládá ze *škál*, tzn. každému poli matice s^{κ}_{ij} je přiřazena škálovací hodnota. Škála je definována předem[9].
- Pro hodnoty škály platí, že čím je *hodnota větší*, tím je první kritérium *významnější* než druhé a obráceně.
- Na vzájemně symetrických polích matice se nacházejí vzájemně převrácené hodnoty škály:

$$s^{\kappa}_{ij} = \frac{1}{s^{\kappa}_{ji}}.$$

2. **Stanovení vlastních hodnot.**

Chceme-li stanovit vlastní vektory (a tím pádem najít váhový vektor), tj. vektory x, pro které platí:

$$x \cdot S^{\kappa} = \lambda \cdot x,$$

musíme nejprve stanovit čísla λ, to jest vlastní hodnoty matice S^{κ}. Vlastní hodnoty stanovujeme podle následující věty:

Fakt. *Nechť A je matice řádu n, potom její vlastní hodnoty jsou rovny kořenům jejího charakteristického polynomu. Charakteristický polynom je roven determinantu $|A - \lambda \cdot E_n|$.*

3. **Vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám.**

Pokud máme stanoveny vlastní hodnoty λ, můžeme stanovit vlastní vektory x, protože:

$$\begin{aligned} x \cdot S^{\kappa} &= \lambda \cdot x, \\ x \cdot S^{\kappa} - \lambda \cdot x \cdot E_n &= o, \\ x \cdot (S^{\kappa} - \lambda \cdot E_n) &= o. \end{aligned}$$

Z předešlého odvození plyne, že vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě λ jsou všechna nenulová řešení soustavy:

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} s^{\kappa}_{11} & \cdots & s^{\kappa}_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s^{\kappa}_{n1} & \cdots & s^{\kappa}_{nn} & 0 \end{array} \right).$$

4. **Váhový vektor.**

V tuto chvíli máme stanoveny vlastní vektory, pokud jsme žádné nenašli, matice zřejmě nebyla vhodně stanovena a měli bychom ji opravit. Nejmenší z vlastních vektorů matice S^{κ} je *váhový vektor*.

[9] typicky celá čísla z intervalu $\langle 1, 9 \rangle$ plus jejich převrácené hodnoty a podobně

Reference

[1] Fiala, Petr — kolektiv: *Vícekriteriální rozhodování.*

[2] Franek, Miloš: *Od algebry k počítačom.*

[3] Seige, Viktor: *Výlet do světa počítačového šachu*, Softwarové noviny, leden 1994.

[4] Williams, J. D.: *Dokonalý stratég, aneb slabikář teorie strategických her.*